

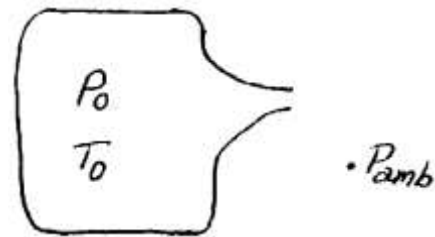
Aula 5 - ESCOAMENTO COM MUDANÇA DE ÁREA

Nessa aula discute-se os fenômenos que ocorrem em dispositivos simples de aceleração/desaceleração de um fluido. Os bocais convergente e convergente-divergente são analisados. Nas notas de aula número 2 discutimos as equações para escoamento isentrópico. A relação número de Mach – área foi deduzida e apresentada, a qual é reproduzida abaixo:

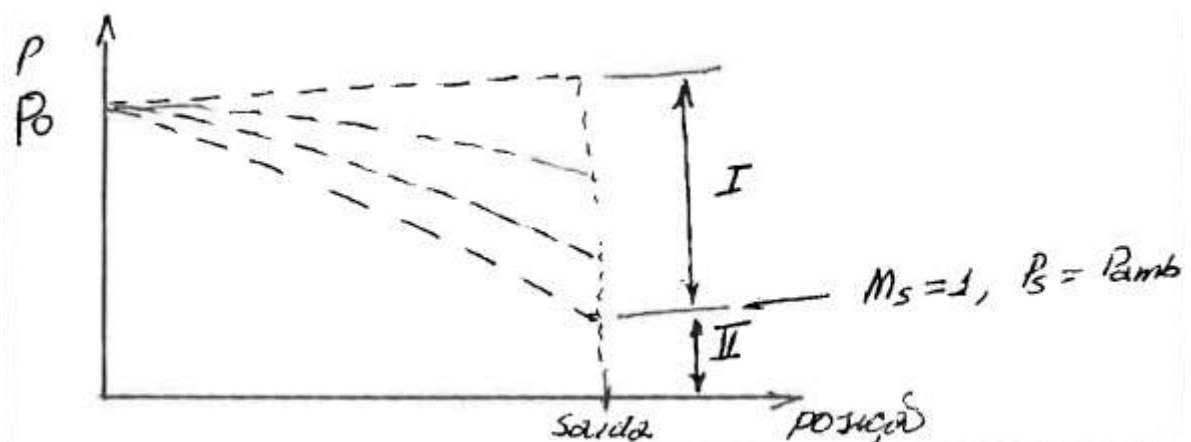
$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (5.1)$$

Bocal convergente

Considere um bocal convergente conectado a um reservatório com a temperatura e pressão de estagnação igual a T_0 e P_0



Na medida que a pressão do ambiente P_{amb} é diminuída a partir de P_0 , as seguintes condições ocorrem:



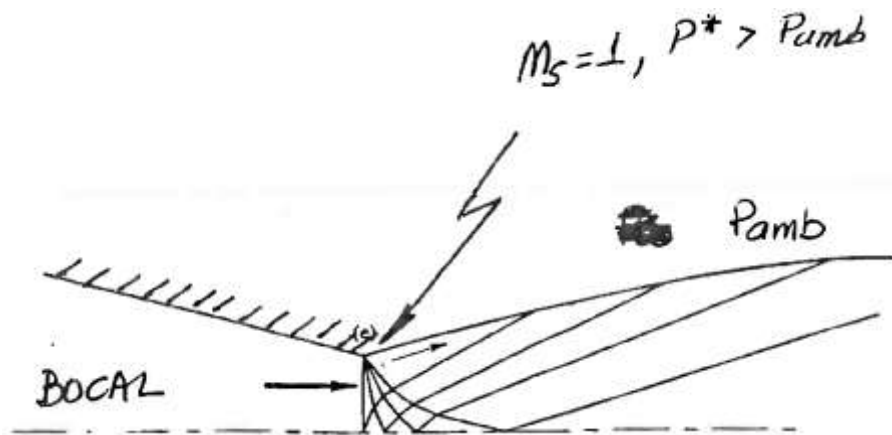
o número de Mach (subsônico) local é dado pela eq. (5.1)

Enquanto o bocal estiver operando na região I subsônica, tem-se:

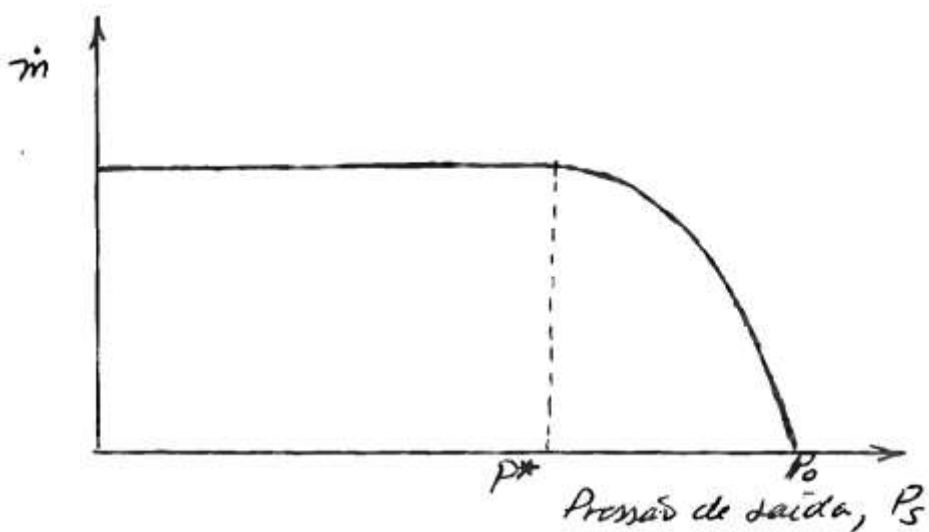
$$P_S = P_{amb} > P^*$$

$$M_S < 1$$

Isto ocorre até que a condição sônica na saída seja atingida. A partir desse ponto, o escoamento muda e a pressão na seção de saída do bocal, isto é, P_S , permanece inalterada, constante e igual a P^* . Essa pressão corresponde à pressão para $M = 1$. Diz-se, então, que o bocal está bloqueado. O resto da expansão de P^* a P_{amb} vai ocorrer fora do bocal, sendo válida a teoria de Prandtl-Meyer, como esquematizado na figura abaixo.

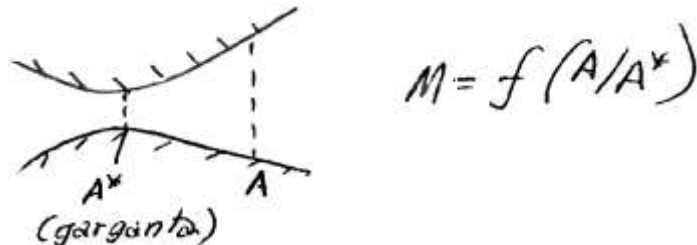


Em termos de vazão mássica, verifica-se que também vai permanecer inalterada na situação sônica, como ilustrado pelo diagrama abaixo.

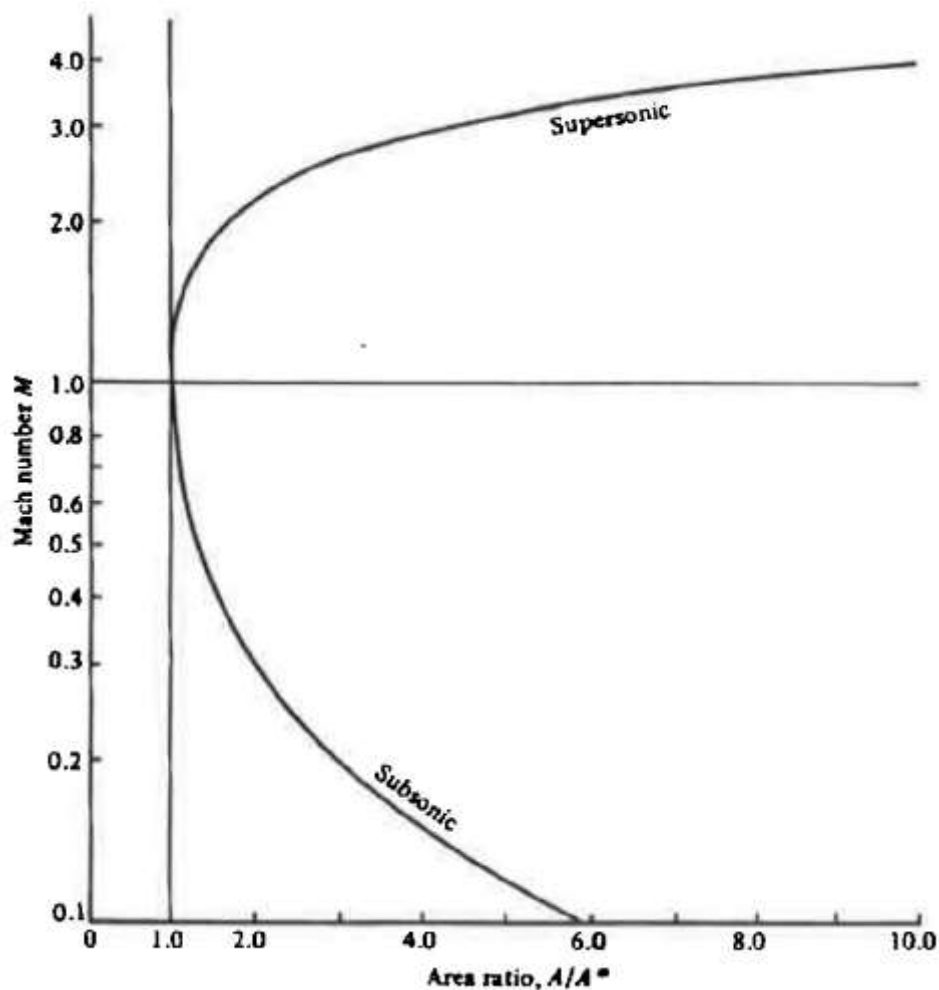


BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE ou LAVAL

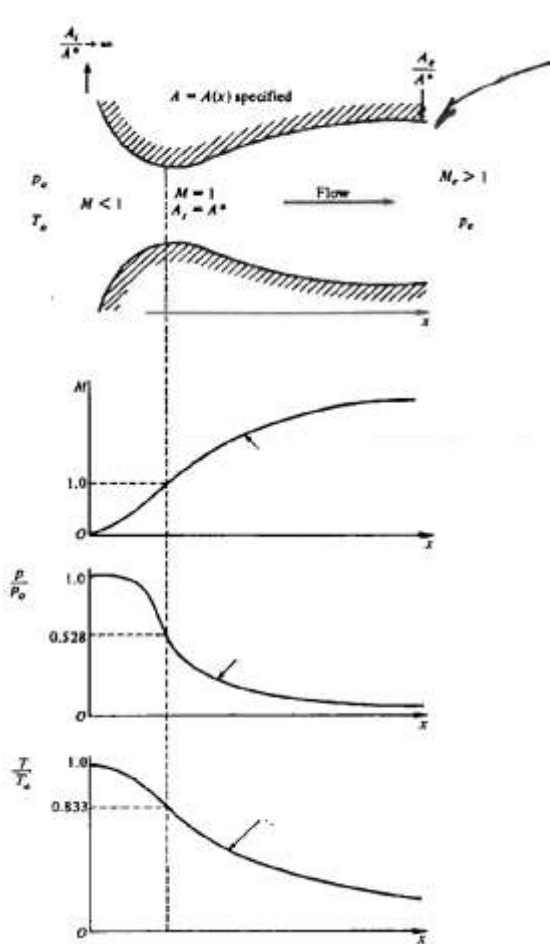
Como já notado anteriormente, a condição supersônica não pode ser atingida em um bocal convergente simples. É necessário que uma seção divergente seja adicionada.



De acordo com a relação número de Mach-área, o número de Mach local é tão somente função de razão entre a área local e a área da garganta do bocal. Isto é válido tanto para a seção convergente como divergente do bocal, como indicado de forma gráfica a seguir.



Note que, de acordo com a relação número de Mach-área, só existe uma solução supersônica isoentrópica possível, cujas propriedades principais variam de acordo com a figura abaixo.



seção de saída

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Para pressões do ambiente diferentes da solução isoentrópica o escoamento no bocal não admite solução isoentrópica e ondas de choque ou de expansão são formadas para ajustar a pressão de saída com a condição ambiente. A próxima página indica diversas condições de operação do bocal.

(a) e (b)
 soluções
 subsônicas
 (c) condição
 limite: quando
 $M=1$ na
 garganta.
 entre
 (c) e (d)
 Uma onda
 de choque
 c' formada
 internamente
 no bocal
 (g) e (h)
 escoamento
 sobre-expandido
 (i) condição
 de projeto
 (k) escoamento
 sub-expandido

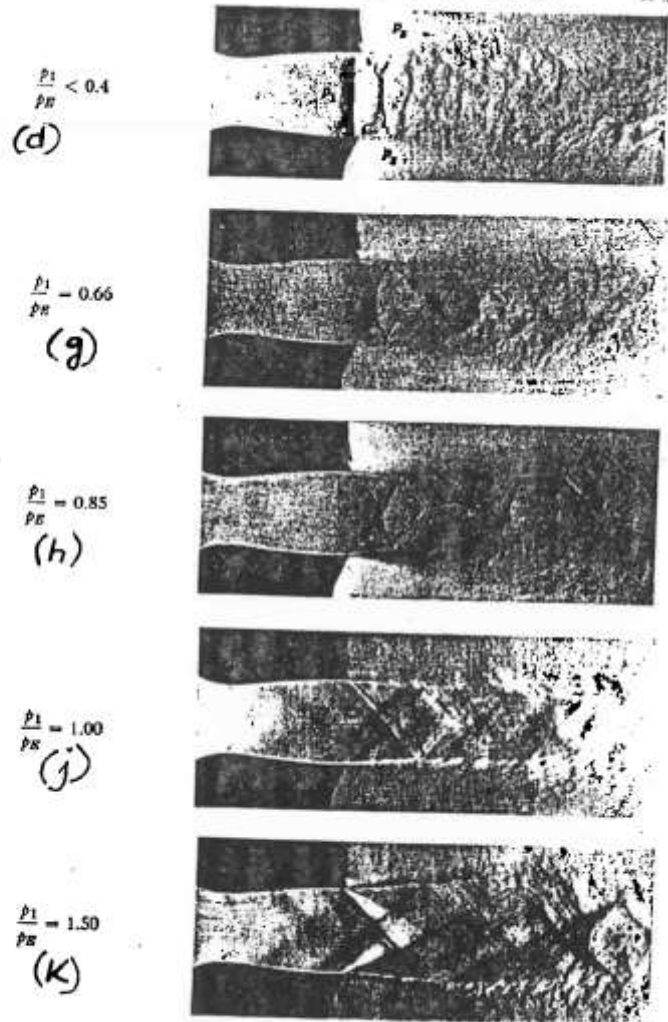
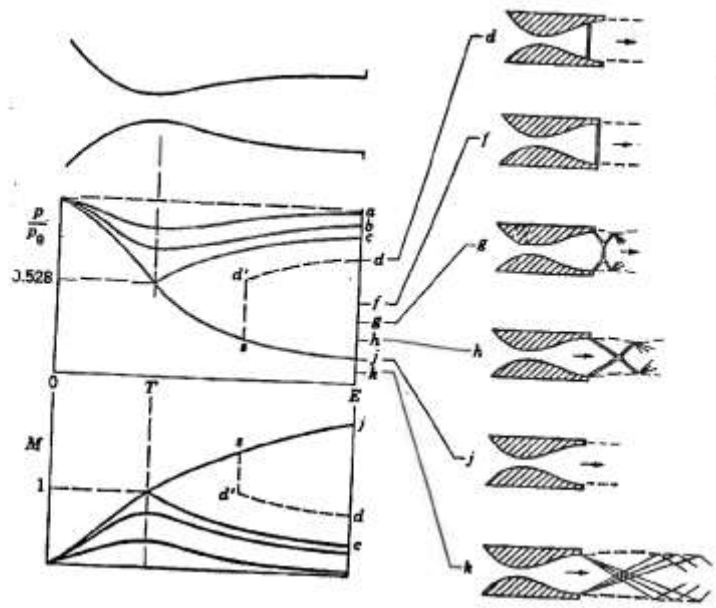
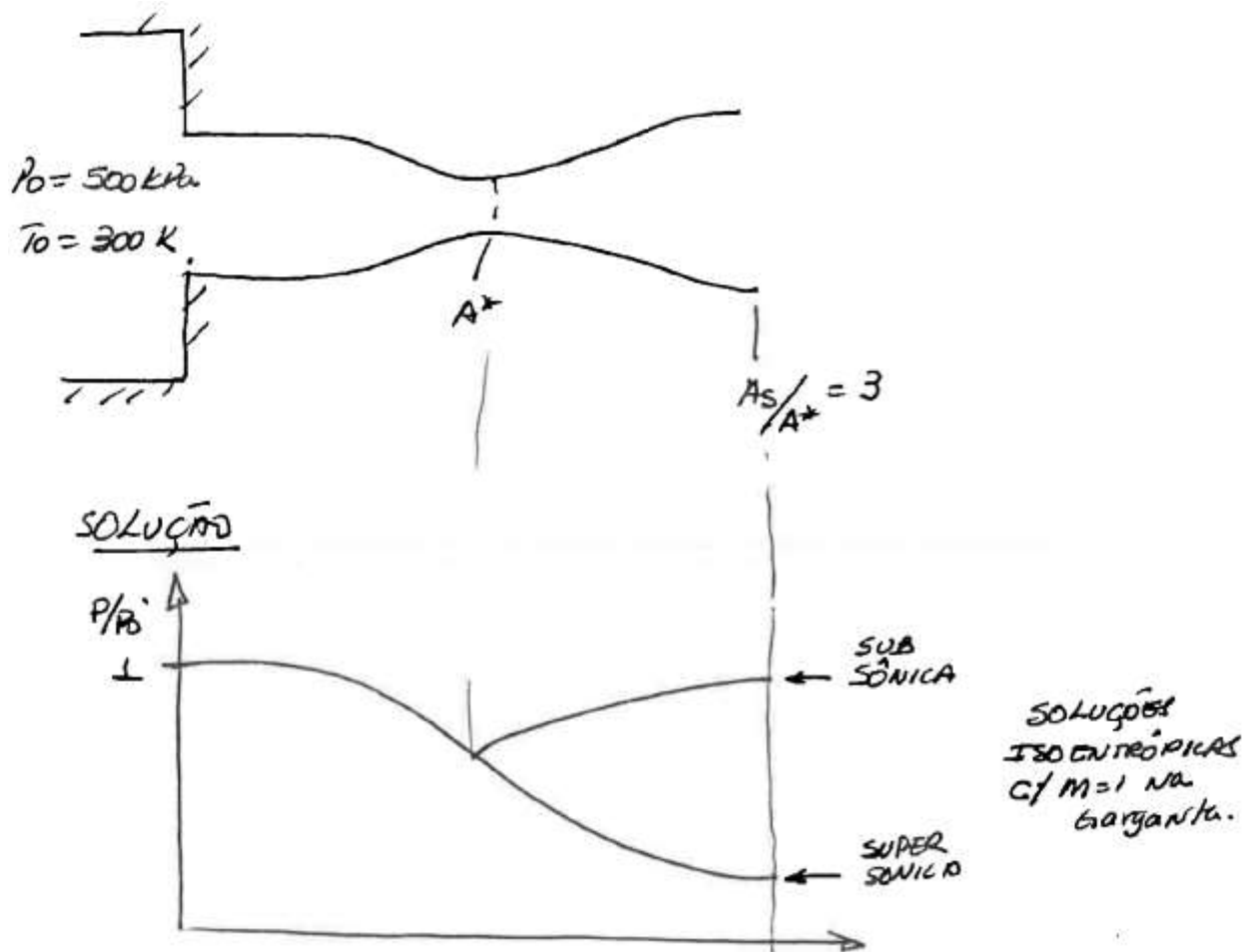


FIG. 5-4 Schlieren photographs of flow from a supersonic nozzle at different back pressures. The photographs, from top to bottom, may be compared with Fig. 5-3, sketches d, g, h, j, k, respectively. Reproduced from: L. Howarth (ed.), *Modern Developments in Fluid Dynamics, High Speed Flow*, Oxford, 1953. **Liepmann**

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Determine as duas condições sônicas de operação isentrópicas para o seguinte bocal.



Para $\frac{A_s}{A^*} = 3$ das tabelas (ou do programa COMPQ)

	Subsônico	Supersônico
M_s	0,1974	2,6374
T_s/T_0	0,9923	0,4182
P_s/P_0	0,9732	0,0473

Example 6-3

A converging–diverging nozzle with an area ratio of 3.0 is attached to a reservoir with stagnation conditions of 500 kPa and 300 K. Identify the key pressures and back pressure ranges for each region. Air is the fluid.

Solution. The solution was obtained using COMPQ. A sketch of the problem is provided in Figure 6-18a. Key pressures (1) and (3) correspond to the two isentropic conditions. Using A/A^* as input for case A of option IS yields

$$\begin{aligned} A/A^* = 3.0 & & M_1 = 0.1974 & & M_2 = 2.6374 \\ T_1/T_0 = 0.9923 & & & & T_2/T_0 = 0.4182 \\ P_1/P_0 = 0.9732 & & & & P_2/P_0 = 0.0473 \end{aligned}$$

from which the key pressures are

$$\begin{aligned} P_1 &= 486.6 \text{ kPa} \\ P_3 &= 23.65 \text{ kPa.} \end{aligned}$$

The situation for key pressure (2) is illustrated in Figure 6-18b. The normal shock occurs at a Mach number of 2.6374. Case U of option NS of COMPQ produces

$$\begin{aligned} M_1 = 2.6374 & & M_2 = 0.5007 \\ P_2/P_1 &= 7.9485. \end{aligned}$$

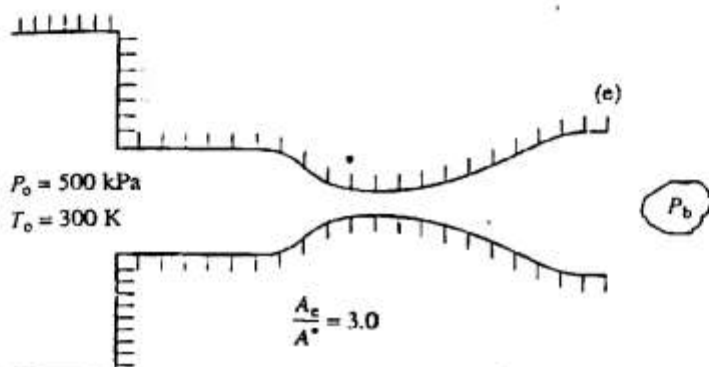
The pressure downstream of the normal shock wave becomes

$$P_{2s} = P_2 = \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_0} P_0 = (7.9485)(0.0473)(500) = 188.0 \text{ kPa.}$$

This is also the back pressure since the Mach number downstream of the shock wave is subsonic. Table 6-3 presents the back pressure ranges associated with the various regions. Given any back pressure for the conditions of this problem, the nozzle flow region can be determined by consulting Table 6-3.

TABLE 6-3 BACK PRESSURE RANGES FOR REGIONS

Region	Back pressure range (kPa)
1	$P_b > 486.6$
2	$188.0 < P_b < 486.6$
3	$23.65 < P_b < 188.0$
4	$P_b < 23.65$



Example 6-4

For the nozzle and conditions of Example 6-3, find the exit Mach numbers and sketch the salient characteristics of the flow field for back pressures of 100 kPa and 10 kPa.

Solution.

(a) Back pressure of 100 kPa

From Table 6-3, a back pressure of 100 kPa lies in region 3. Thus the nozzle is choked, the flow is supersonic in the diverging portion, and an oblique shock is attached to the lip of the nozzle. The flow field is sketched in Figure 6-19a. From Example 6-3,

the pressure in the nozzle exit plane is 23.65 kPa with an exit Mach number of 2.6374. Across the oblique shock the pressure must increase from 23.65 kPa to 100 kPa, a pressure ratio of 4.2283. Using case PR of option OS of COMPQ, the oblique shock angle and the deflection are

$$M_c = 2.6374 \quad \theta = 47.38^\circ \quad \delta = 24.52^\circ.$$

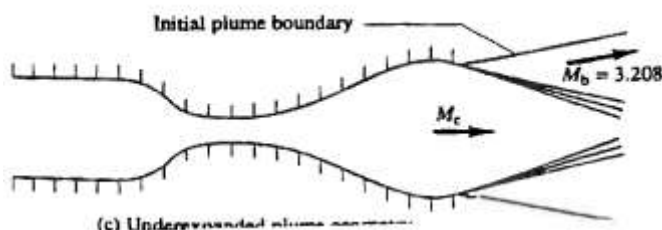
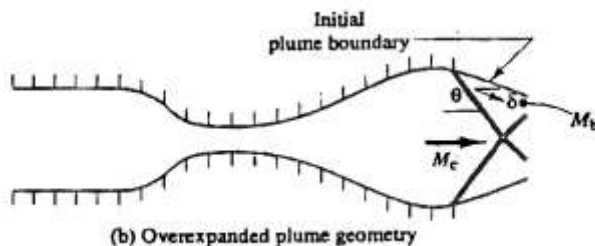
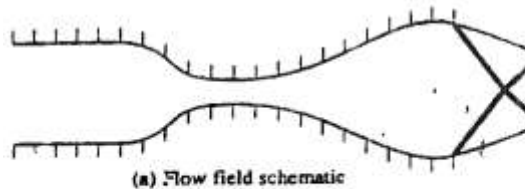
Figure 6-19b illustrates the shock angle and the deflection as well as the initial plume angle of the flow as it leaves the nozzle.

(b) Back pressure of 10 kPa

Table 6-3 shows that this back pressure is in region 4. Hence the nozzle is choked, the flow is supersonic in the diverging portion, and an expansion fan is attached to the lip of the nozzle. The flow field is indicated in Figure 6-19c. The exit plane Mach number and pressure are 2.6374 and 23.65 kPa, respectively. The expansion fan must expand the flow from 23.65 kPa to 10.0 kPa. The pressure ratio for the expansion is 0.4228, from which case PR of option PM of COMPQ yields

$$\Delta\nu = 11.359^\circ$$

$$M_b = 3.208.$$



Example 6-5

Given the conditions of Example 6-3, find the exit Mach number and pressure and sketch the flow field for a back pressure of 250 kPa.

Solution. Table 6-3, constructed in Example 6-3, will be used here to determine the region associated with a back pressure of 250 kPa. A back pressure of 250 kPa places the nozzle flow in region 2, a normal shock standing in the diverging section.

This example will be solved first by using Eq. 6-38 and then by using an iterative process. The "inlet" for the diverging nozzle will be taken as the actual throat of the nozzle. The term C then becomes

$$C = \frac{P^* A^*}{P_e A_e} \frac{1}{\sqrt{T^*/T_e}} = \frac{(0.5283)(500)}{250.0} \frac{1}{3.0} \frac{1}{\sqrt{.8333}} = 0.38582.$$

M_e^2 is obtained from Eq. 6-36:

$$M_e^2 = \frac{-1 \pm [1 + 2.0(1.4 - 1)0.38582^2]^{1/2}}{1.4 - 1},$$

so that

$$M_e^2 = 0.1447, -5.1447.$$

With the exit Mach number and static pressure known,

$$P_{o2} = \frac{P_{o1}}{P_2} P_2 = \frac{P_2}{P_2/P_{o1}} = \frac{250}{0.9050} = 276.24 \text{ kPa},$$

so that

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{276.24}{500} = 0.55249.$$

Option NS of COMPQ yields

$$M_2 = 0.5263$$

$$M_1 = 2.3709$$

$$P_2/P_1 = 6.3914.$$

The shock is located at

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{A_1}{A_1} = 2.3396.$$

The iterative process requires a series of region 2 computations. The usual procedure is to assume an upstream Mach number M_1 (or an area ratio A_1/A_1^*) from which P_{o2}/P_{o1} can be found. Then

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{A_e}{A_1} \frac{P_{o2}}{P_{o1}},$$

which defines the exit Mach number M_e and P_e/P_{o2} . Finally, P_e/P_{o1} can be expressed as

$$\frac{P_e}{P_{o1}} = \frac{P_e}{P_{o2}} \frac{P_{o2}}{P_{o1}}.$$

When the assumed value of M_1 yields the correct value of P_e/P_{o1} , which is known, the iteration has converged. For this problem, the iterative sequence is given in Table 6-4. The iteration yields the same results as evaluation of Eq. 6-38. Once the Mach number is found by the iterative process, the remaining parameters are computed as in the first solution.

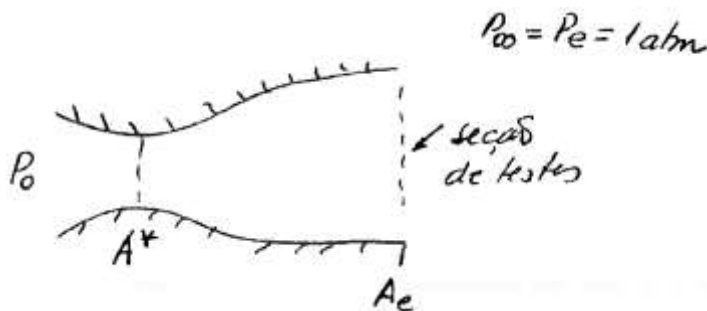
TABLE 6-4 ITERATIVE SEQUENCE FOR EXAMPLE 6-5

M_1	P_{o2}/P_{o1}	A_e/A_1^*	M_e	P_2/P_{o2}	P_e/P_{o1}
1.30	0.9794	2.9382	0.2018	0.9720	0.9520
2.00	0.7209	2.1617	0.2804	0.9469	0.6830
2.32	0.5745	1.7235	0.3630	0.9130	0.5295
2.48	0.5071	1.5213	0.4227	0.8844	0.4485
2.40	0.5401	1.6203	0.3909	0.9000	0.4860
2.36	0.5572	1.6716	0.3765	0.9068	0.5053
2.38	0.5486	1.6458	0.3836	0.9035	0.4957
2.37	0.5529	1.6587	0.3800	0.9052	0.5005

DIFUSORES – SEÇÃO DE TESTES SUPERSÔNICAS

Já foi visto como se pode obter um escoamento supersônico com uma variação simples de área. Entretanto, existem formas mais eficientes (custo mais baixo) de se obter um escoamento supersônico usando não um bocal simples, mas uma combinação de dispositivos como vai se mostrar nessa seção. Considere que se deseja obter um número de Mach igual a 3. Quatro possíveis configurações são analisadas.

Configuração (1) – bocal convergente-divergente simples



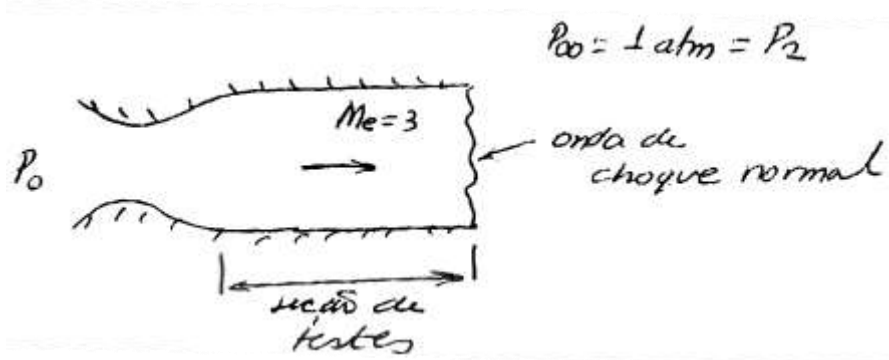
Solução Isoentrópica ($M_e = 3$)

$$\frac{A_e}{A^*} = 4,2 \quad \text{e} \quad \frac{P_o}{P_e} = 36,7$$

$$P_o = 36,7 \text{ atm}$$

∴ É preciso 36,7 atm para alcançar um $M_e = 3$ na região de saída do bocal .

Configuração (2) – bocal convergente-divergente simples com seção de saídas estendida.



Tem-se:

Das referidas tabelas

$$P_0 = \frac{P_0}{P_e} \times \frac{P_e}{P_2} \times P_\infty$$

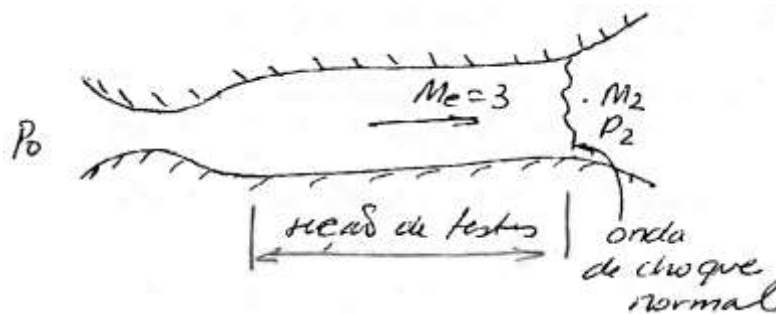
tabelas isoentrópicas $M_e = 3$
tabelas de choque normal $M_e = 3$

$$P_0 = 36,73 \times \frac{1}{10,33} \times 1 = 3,56 \text{ atm}$$

$$P_0 = 3,56 \text{ atm}$$

∴ Pela introdução de uma seção reta com formação de onda de choque normal na seção de saída foi possível obter $M_e = 3$ reduzindo a pressão de $P_0 = 36,7 \text{ atm}$ para $P_0 = 3,56 \text{ atm}$.

Configuração (3) – bocal convergente-divergente simples com difusor acoplado.



$$M \ll 1$$

$$P_\infty = 1 \text{ atm}$$

$$P_\infty = P_{02}$$

$$P_0 = \frac{P_0}{P_e} \times \frac{P_e}{P_2} \times \frac{P_2}{P_{02}} \times P_\infty$$

tabelas: iso choque iso

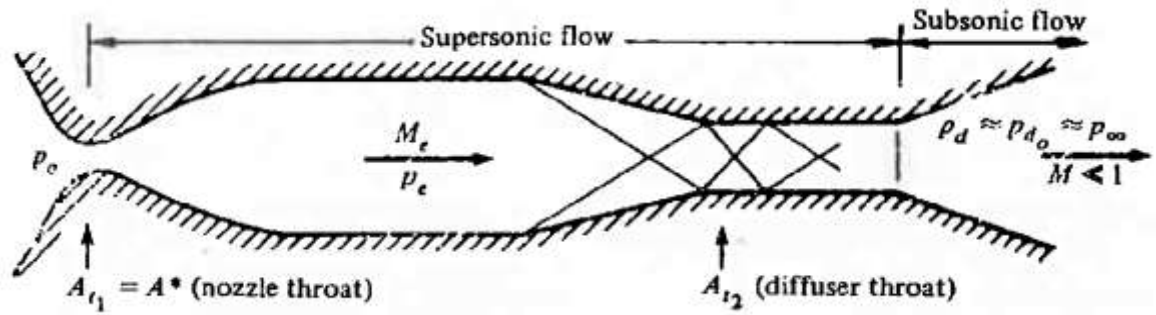
$$P_\infty = P_{02}$$

$$P_0 = 36,7 \times \frac{1}{10,33} \times \frac{1}{1,17} \times 1 = 3,04 \text{ atm}$$

$$P_0 = 3,04 \text{ atm}$$

Pela introdução de uma seção divergente na região de saída da seção reta, pode-se diminuir ainda mais a pressão de estagnação de alimentação. Esta é a configuração (4)

Configuração (4) – bocal convergente-divergente simples com seções convergente, reta e divergente na saída.



Razão: Ondas de choque oblíquas são, em geral, menos irreversíveis, o que implica em menor perda de pressão de estagnação.